# Über die Lambert'sche Reihe und ihre vielen vorzüglichen Eigenschaften*

Leonhard Euler

§1 Mit diesem Namen lässt sich jene höchst merkwürdige Reihe bezeichnen, mit welcher Lambert, ein Mann mit größtem Scharfsinn, die Wurzeln von trinomialen Gleichungen als erster in Band III der **Actorum Helveticorum** auszudrücken gelehrt hat. Aber diese Reihe, wenn ihre Terme ein wenig verändert werden, kann in der folgenden Form dargestellt werden

$$
\begin{aligned}
S = 1 + nv &+ \frac{1}{2}n(n+\alpha+\beta)v^2 \\
&+ \frac{1}{6}n(n+\alpha+2\beta)(n+2\alpha+\beta)v^3 \\
&+ \frac{1}{24}n(n+\alpha+3\beta)(n+2\alpha+2\beta)(n+3\alpha+\beta)v^4 \\
&+ \text{etc.},
\end{aligned}
$$

die Summe $S$ welcher Reihe so von der Auflösung dieser trinomialen Gleichung

$$x^\alpha - x^\beta = (\alpha-\beta)vx^{\alpha+\beta}$$

abhängt, dass

*Originaltitel: "De serie Lambertina plurimisque eius insignibus proprietatibus", zuerst publiziert in: *Acta Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae, Band 1779: II* (1783, geschrieben 1776): pp. 29b – 51, Nachdruck in: Opera Omnia: Serie 1, Band 6, pp. 350 – 369, Eneström Nummer E532, übersetzt von: Alexander Aycock für den "Euler-Kreis Mainz".

$$S = x^n$$

ist; hier, weil jene Gleichung mehrere Wurzeln haben kann, muss für $x$ deren größte oder kleinste angenommen werden, je nachdem, was die Umstände erfordern. Es scheint aber ratsam, die Reihe in der gegenwärtigen Form darzubieten, dass die Buchstaben $\alpha$ und $\beta$ vertauschbar werden, sodass, was auch immer über den einen beobachtet worden ist, auch für den anderen gilt.

**§2** Die wesentliche Eigenschaft dieser Reihe besteht also darin, dass ihre Summe immer einer Potenz des Exponenten $n$ gleich ist, zu welchem eine gewisse Größe erhoben wird. Wenn also für irgendeinen fixen Wert von $n$, sei er $n = p$, die Summe der Reihe $= P$ gesetzt wird, aber für irgendeinen anderen Wert $n = q$ die Summe $= Q$ gesetzt wird, dann, weil man $P = x^p$ und $Q = x^q$ haben wird, ist es offenkundig, dass $P^q = Q^p$ oder

$$\log P : \log Q = p : q$$

sein wird; und so, solange die Summe dieser Reihe für einen einzigen Fall des Exponenten $n$ bekannt geworden ist, werden daraus die Summen für irgendwelche anderen Werte immer angegeben werden können, wenn freilich die übrigen Größen $\alpha$, $\beta$ und $v$ dieselben Werte beibehalten. Es wäre also stark zu wünschen, dass die vorzügliche Eigenschaft aus der Gestalt der Reihe selbst bewiesen werden könnte.

**§3** Hier taucht also vor allem der bemerkenswerte Fall auf, in dem $n = 0$ und die Summe $S = 1$ ist. Weil also $S = x^n$ ist, ist bekannt, dass im Fall $n = 0$ die Formel $\frac{x^n - 1}{n}$ in den hyperbolischen Logarithmus von $x$ übergeht, weswegen dieser Fall uns diese besonders merkwürdige Summation an die Hand gibt

$$\log x = v + \frac{1}{2}(\alpha+\beta)v^2$$
$$+ \frac{1}{6}n(\alpha+2\beta)(2\alpha+\beta)v^3$$
$$+ \frac{1}{24}(\alpha+3\beta)(2\alpha+2\beta)(3\alpha+\beta)v^4$$
$$+ \frac{1}{120}(\alpha+4\beta)(2\alpha+2\beta)(3\alpha+2\beta)(4\alpha+\beta)v^5$$
$$+ \text{etc.},$$

Wenn also die Summe dieser Reihe schon entdeckt worden ist und $\Delta$ genannt wird, wird wegen $\log x = \Delta$ auch $x = e^{\Delta}$ sein, während $e$ die Zahl bezeichnet, deren hyperbolischer Logarithmus $= 1$ ist. Daher wird in Kenntnis dieses Wertes $\Delta$ für irgendeine Zahl $n$ die Summe der vorgelegten Reihe $= e^{n\Delta}$ sein; daher lässt sich also eine andere der vorgelegten gleiche unendliche Reihe darbieten, nämlich

$$S = 1 + n\Delta + \frac{1}{2}n^2\Delta^2 + \frac{1}{6}n^3\Delta^3 + \frac{1}{24}n^4\Delta^4 + \text{etc.};$$

aber dann, weil $\Delta = \log x$ ist, wird man zugleich diese Gleichung haben

$$e^{\alpha\Delta} - e^{\beta\Delta} = (\alpha-\beta)ve^{(\alpha+\beta)\Delta}$$

oder

$$e^{-\beta\Delta} - e^{\alpha\Delta} = (\alpha-\beta)v,$$

aus welcher Gleichung sich der Wert von $\Delta$ auch ausfindig machen lassen wird.

**§4** Außerdem lässt sich aber die Summation der vorgelegten allgemeinen Reihe auch so beschreiben, dass, wenn

$$v = \frac{x^{-\beta} - x^{-\alpha}}{\alpha - \beta}$$

war, die Summe der Reihe

$$S = x^n$$

sein wird, und das sogar, welche Werte auch immer den Buchstaben $\alpha$ und $\beta$ zugeteilt werden, wenn nur bemerkt wird, wie wir schon beobachtet haben, wannimmer aus mehreren für $x$ angenommenen Werten derselbe Wert für $v$ resultieren kann, dass dann für die Summe $S = x^n$ immer der gewählt werden muss, der entweder der größte oder der kleinste war. Nachdem diese Dinge im Voraus erwähnt worden sind, wollen wir einige besondere Fälle in Bezug auf die Buchstaben $\alpha$ und $\beta$ durchgehen, mit welchen das Verständnis über unsere Reihe nicht unwesentlich gefördert werden wird.

## FALL I,
## IN WELCHEM $\beta = 0$ IST

**§5** Weil ja die Buchstaben $\alpha$ und $\beta$ vertauschbar sind, ist es unwesentlich, ob $\alpha$ oder $\beta$ verschwindet. Es sei also $\beta = 0$ und unsere Reihe wird die folgende Form annehmen

$$\begin{aligned}S = 1 + nv &+ \frac{1}{2}n(n+\alpha)v^2\\ &+ \frac{1}{6}n(n+\alpha)(n+2\alpha)v^3\\ &+ \frac{1}{24}n(n+\alpha)(n+2\alpha)(n+3\alpha)v^4\\ &+ \frac{1}{120}n(n+\alpha)(n+2\alpha)(n+3\alpha)(n+4\alpha)v^5\\ &+ \text{etc.},\end{aligned}$$

deren Summe also $S = x^n$ sein wird, wenn nur $x$ aus dieser Gleichung $x^\alpha - 1 = \alpha v x^\alpha$ genommen wird, aus welcher $x^\alpha = \frac{1}{1-\alpha v}$ und daher

$$x = (1-\alpha v)^{-\frac{1}{\alpha}}$$

hervorgeht; deswegen wird die Summe dieser Reihe

$$S = (1-\alpha v)^{-\frac{n}{\alpha}}$$

sein, welche auf die übliche Weise entwickelt völlig dieselbe Reihe erzeugt. In diesem Fall erhält also die LAMBERT'sche Reihe schon ein starkes Firmament.

**§6** Wenn wir hier den Exponenten $n$ verschwindend annehmen, wird die Reihe auf diese Weise auf Logarithmus zurückgeführt werden, dass

$$\log x = v + \frac{1}{2}\alpha v^2 + \frac{1}{3}\alpha\alpha v^3 + \frac{1}{4}\alpha^3 v^4 + \frac{1}{5}\alpha^4 + v^4 + \text{etc.}$$

ist. Weil also $x = (1-\alpha v)^{-\frac{1}{\alpha}}$ ist, wird

$$\log x = -\frac{1}{\alpha}\log(1-\alpha v)$$

sein. Es ist aber bekannt, dass

$$\log(1-\alpha v) = -\alpha v - \frac{1}{2}\alpha^2 v^2 - \frac{1}{3}\alpha^3 v^3 - \frac{1}{4}\alpha^4 v^4 - \text{etc.}$$

ist, welche Reihe mit $-\frac{1}{\alpha}$ multipliziert die gerade gefundene Reihe ergibt.

## Fall II,
## in welchem $\beta = \alpha$ ist

**§7** Dieser Fall ist besonders merkwürdig, weil die Gleichung, aus welcher der Wert $x$ abgeleitet werden muss, unpassend ist, nämlich $x^\alpha - x^\alpha = 0vx^{2\alpha}$ oder $0 = 0$; um diesen Umstand zu vermeiden, wollen wir $\alpha = \beta + \omega$ setzen, während $\omega$ unendlich klein ist und unsere Gleichung wird

$$x^{\beta+\omega} - x^\beta = \omega v x^{2\beta+\omega}$$

oder

$$\frac{x^\omega - 1}{\omega} = \log x$$

sein, sodass in diesem Fall

$$\log x = vx^{\beta+\omega} = vx^\alpha$$

wird, welches auch die Gleichung ist, aus welcher der Wert von $x$ gefunden werden muss.

**§8** Nachdem aber $\beta = \alpha$ gesetzt worden ist, werden wir zur folgenden Reihe gelangen

$$\begin{aligned} S = 1 + nv + & \frac{1}{2}\, n(n+\alpha)v^2 \\ + & \frac{1}{6}\, n(n+3\alpha)^2 v^3 \\ + & \frac{1}{24}\, n(n+3\alpha)^3 v^4 \\ + & \frac{1}{120} n(n+4\alpha)^4 v^5 \\ + & \frac{1}{720} n(n+4\alpha)^5 v^6 + \text{etc.}, \end{aligned}$$

welche Reihe daher besonders bemerkenswert ist, weil nicht nur die Exponenten ununterbrochen wachsen, sondern auch die erhobenen Größen in einer arithmetischen Progression fortschreiten, Reihen von welcher Art bis jetzt kaum von den Geometern betrachtet worden sind. Dennoch wissen wir indes hier, dass die Summe dieser Reihe $S = x^n$ ist, wenn nur der Wert von $x$ dieser Gleichung zukommt, nämlich $\log x = vx^\alpha$; es ist aber nicht möglich, diesen Wert anders als durch Approximationen zu erkennen.

**§9** Wenn wir also weiter $n = 0$ setzen, wird aus dem oben Erwähnten die folgende Reihe abgeleitet

$$\log x = v + \alpha v^2 + \frac{3^2}{6}\alpha^2 v^3 + \frac{4^3}{24}\alpha^3 v^4 + \frac{5^4}{120}\alpha^4 v^5 + \frac{6^5}{720}\alpha^5 v^6 + \text{etc.}$$

Weil also $\log x = vx^\alpha$ ist, wird

$$\begin{aligned} x^\alpha = 1 + \frac{2^1}{1\cdot 2}\alpha v + \frac{3^2}{1\cdot 2\cdot 3}\alpha^2 v^2 + \frac{4^3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\alpha^3 v^3 + \frac{5^4}{1\cdot 2\cdots 5}\alpha^4 v^4 \\ + \frac{6^5}{1\cdot 2\cdots 6}\alpha^5 v^5 + \text{etc.} \end{aligned}$$

sein. Wir wollen hier $\alpha v = u$ setzen, sodass $\alpha \log x = ux^\alpha$ ist. Es sei nun weiter $x^\alpha = y$ und daher $\alpha \log x = \log y$; als logische Konsequenz wird unsere Gleichung $\log y = uy$ werden, weshalb wir diese Summation erlangen

$$y = 1 + \frac{2^1}{1\cdot 2}u + \frac{3^2}{1\cdot 2\cdot 3}uu + \frac{4^3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}u^3 + \frac{5^4}{1\cdot 2\cdots 5}u^4 + \frac{6^5}{1\cdot 2\cdots 6}u^5 + \text{etc.},$$

wenn nur $u = \frac{\log y}{y}$ war.

**§10** Weil ja in dieser Reihe die Exponenten der Zähler von den Zählern selbst um die Einheit abweichen, wollen wir sie auf die folgende Weise angleichen. Wir wollen auf beiden Seiten mit $u$ multiplizieren und differenzieren und es wird

$$\frac{d.\log y}{du} = \frac{dy}{ydu} = 1 + \frac{2^2}{1\cdot 2}u + \frac{3^3}{1\cdot 2\cdot 3}uu + \frac{4^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}u^3 + \frac{5^5}{1\cdot 2\cdots 5}u^4$$
$$+\frac{6^6}{1\cdot 2\cdots 6}u^5 + \text{etc.}$$

Weil aber $\log y = uy$ ist, wird $\frac{dy}{y} = udy + ydu$ sein, woher $\frac{dy}{du} = \frac{yy}{1-uy}$ wird; und so wird jene Summe

$$= \frac{y}{1-uy}$$

sein. Wir wollen weiter beide Seiten mit $u$ multiplizieren und wegen $uy = \log y$ werden wir diese höchst bemerkenswerte Summation erlangen

$$\frac{\log y}{1-\log y} = u + \frac{2^2}{1\cdot 2}u^2 + \frac{3^3}{1\cdot 2\cdot 3}u^3 + \frac{4^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}u^4 + \frac{5^5}{1\cdot 2\cdots 5}u^5 + \text{etc.},$$

wenn nur $u = \frac{\log y}{y}$ war.

**§11** Diese letzte Reihe verdient wegen der Harmonie besonders, dass wir ihr Wesen genauer untersuchen. Und zuerst ist freilich klar, wenn wir $u = 1$ oder $u > 1$ annehmen würden, dass eine divergente Reihe hervorginge, weil in der allgemeinen Formel $\frac{n^n}{1\cdot 2\cdots n}$ der Zähler den Nenner immer mehr überragt und alle Terme daher ins unendliche wachsen, was ein Anzeichen für eine imaginäre Summe ist; das wird durch die Form $u = \frac{\log y}{y}$ deutlich angezeigt, weil ja der Logarithmus keiner Zahl größer als die Zahl selbst werden kann. Wannimmer aber $u$ kleiner als die Einheit angenommen wird, kann die Summe dieser Reihe natürlich als unendlich hervorgehen, sooft natürlich die Formel $\frac{\log y}{y}$ einen endlichen Wert annimmt, was passiert, wannimmer $\log y < 1$ oder $y < e$ ist. Nachdem aber $y = e$ genommen worden ist, woher $u = \frac{1}{e}$ wird, wird unsere Reihe immer noch eine unendliche Summe haben, obgleich ihre Terme immer weiter schrumpfen und sogar schließlich verschwinden.

**§12** Aber in dieser Reihe tritt das besonders merkwürdige Phänomen auf, wenn $u$ nur ein wenig $\frac{1}{e}$ überragt, dass die Terme schließlich ins Unendliche wachsen, was hervorragend mit dem übereinstimmt, was ich einst über den Wert des Produktes $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$ in den *Institutiones Calculi differentialis* auf Seite 466 bemerkt habe. Wenn man nämlich

$$T = \frac{n^n}{1 \cdot 2 \cdots n}$$

setzt, dass

$$\log T = n \log n - \log 1 - \log 2 - \log 3 - \cdots \log n$$

ist, habe ich an erwähnter Stelle gezeigt, dass

$$\begin{aligned} &\log 1 + \log 2 + \log 3 + \log 4 + \cdots + \log n \\ =& \frac{1}{2} \log 2\pi + \left(n + \frac{1}{2}\right) \log n - n + \frac{1}{12n} - \frac{1}{360n^3} + \frac{1}{1260n^5} - \text{etc.} \end{aligned}$$

ist, woher folgt, dass das Produkt

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n = \frac{\sqrt{2\pi} \cdot n^{n+\frac{1}{2}} \cdot e^{\frac{1}{12n} - \frac{1}{360n^3} + \text{etc.}}}{e^n}$$

ist, und so werden wir

$$T = \frac{1}{\sqrt{2n\pi}} \cdot e^{n - \frac{1}{12n} + \frac{1}{360n^3} - \text{etc.}}$$

haben. Wannimmer also $n$ eine sehr große Zahl ist, wird der ganze Term unserer Reihe $Tu^n = \frac{e^n u^n}{\sqrt{2n\pi}}$ sein, aus welcher Form es offensichtlich ist, sobald $eu > 1$ oder $u > \frac{1}{e}$ war, dass dann der Term unendlich wird; wenn aber $eu$ entweder $= 1$ oder sogar $< 1$ oder $u < \frac{1}{e}$ war, dann wird dieser Term verschwinden.

**§13** Wir wollen diese Summation an einem einzigen Beispiel illustrieren und $\log y = \frac{1}{2}$ setzen, dass die Summe der Reihe $= 1$ wird; aber dann wird $u = \frac{1}{2\sqrt{e}}$ sein, in welchem Fall wir also sicher sind, dass

$$1 = u + \frac{2^2}{1 \cdot 2} u^2 + \frac{3^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} u^3 + \frac{4^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} u^4 + \text{etc.}$$

sein wird. Weil aber $e = 2,71828$ ist, werden die Werte der ersten Terme dieser Reihe in Dezimalbrüchen so ausgedrückt gefunden werden

$$u = 0,303265,$$

$$2u^2 = 0,183940,$$

$$\frac{9}{2}u^3 = 0,125511,$$

$$\frac{32}{3}u^4 = 0,090223,$$

$$\frac{5^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}u^5 = 0,066801,$$

$$\frac{3^2 \cdot 6^2}{5}u^6 = 0,050409.$$

Diese Reihe konvergiert also sehr langsam, dennoch so, dass die ganze Summe zu verstehen ist, nicht über die Einheit hinaus anzusteigen.

## ÜBER DIE AUFLÖSUNG DER GLEICHUNG $\log x = vx^\alpha$

**§14** Weil ja für den zweiten Fall, wo $\beta = \alpha$ ist, die Summation unserer Reihe von der Gleichung $\log x = vx^\alpha$ abhängt, aus welcher für jeden Wert $v$ die Größe $x$ gefunden werden muss, ist es vor allem ratsam zu bemerken, dass jedem Wert $v$ zwei Werte von $x$ entsprechen können. Um das zu zeigen, wollen wir $x^\alpha = y$ und $\alpha v = u$ setzen, dass man diese Gleichung $\log y = uy$ oder $u = \frac{\log y}{y}$ hat; daher ist klar, dass die Zahl $u$ nicht positiv sein kann, wenn nicht $y > 1$ ist. Aber dann wird immer $u < \frac{1}{e}$ sein, weil der größte Werte der Formel $\frac{\log y}{y}$ nach Nehmen von $y = e$ entspringt, so dass, ob $y$ größer als $e$ genommen wird oder kleiner, immer $u < \frac{1}{e}$ hervorgeht. Daher ist also klar, dass die für den zweiten Fall gefundene Reihe keine endliche Summe haben kann, solange $u > \frac{1}{e}$ oder $v > \frac{1}{\alpha e}$ war, wenn freilich $v$ eine positive Größe war; wannimmer sie nämlich negativ wäre, wäre wegen der alternativen Vorzeichen die Summe immer endlich.

**§15** Daher folgt weiter, sooft $u < \frac{1}{e}$ war, dass zwei Werte für $y$ dargeboten werden können, der eine natürlich größer als $e$ der andere hingegen kleiner, aus jedem von welchen beiden $u = \frac{\log y}{y}$ hervorgeht. Wie wenn beispielsweise entweder $y = 2$ oder $y = 4$ gesetzt wird, geht beide Male $u = \frac{\log 2}{2}$ hervor. Dasselbe trägt sich zu, ob man

$$y = \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{27}{8} \quad \text{oder} \quad y = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$$

setzt, weil ja aus jedem der beiden $u = \frac{8}{9}\log\frac{3}{2}$ hervorgeht. Dasselbe passiert weiter, ob man

$$y = \left(\frac{4}{3}\right)^4 \quad \text{oder} \quad y = \left(\frac{4}{3}\right)^3$$

setzt, weil ja aus jedem der beiden $u = \frac{3^4}{4^3}\log\frac{4}{3}$ wird.

**§16** Um zwei solche Werte von $y$ zu finden, seien $p$ und $q$ Werte von dieser Art, mit welchen $u = \frac{\log p}{p} = \frac{\log q}{q}$ werde. Wir wollen nun $q = pr$ setzen und es muss

$$\frac{\log p}{p} = \frac{\log pr}{pr} = \frac{\log p + \log r}{pr}$$

oder $r \log p = \log p + \log r$ werden, woher $\log p = \frac{\log r}{r-1}$ und daher $p = r^{\frac{1}{r-1}}$ sowie $q = r^{\frac{r}{r-1}}$ wird; um diese Formeln gefälliger zu machen, wollen wir $\frac{1}{r-1} = m$ setzen, dass $r = \frac{m+1}{m}$ ist, woher die zwei Werte von $y$, welche wir $p$ und $q$ genannt haben, w nun sein werden: Der eine

$$y = p = \left(\frac{m+1}{m}\right)^m,$$

der andere hingegen

$$y = q = \left(\frac{m+1}{m}\right)^{m+1};$$

aus jedem der beiden geht nämlich

$$u = \frac{m^{m+1}}{(m+1)^m}\log\frac{m+1}{m}$$

hervor.

**§ 16 [a]** Nachdem diese Dinge erläutert worden sind, entsteht diese Frage von größter Bedeutung, welcher dieser zwei Werte von $y$ verwendet werden muss, um die Summe dieser Reihe auszudrücken

$$y = 1 + \frac{2^1}{1 \cdot 2}u + \frac{3^2}{1 \cdot 2 \cdot 3}u^2 + \frac{4^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}u^3 + \frac{5^4}{1 \cdot 2 \cdots 5}u^4 + \text{etc.}$$

Um diese Frage aufzulösen, wollen wir zuerst $u = \frac{1}{e}$ nehmen, dass jeder der beiden Werte von $y$ dann $= e$ ist; denn es besteht kein Zweifel, dass in diesem Fall $y = e$ gilt. Nun ist aber, wenn $n < \frac{1}{e}$ war, ersichtlich, dass die Summe der Reihe kleiner als $e$ ist. Weil wir also für $y$ zwei Werte gefunden haben, der eine größer, der andere kleiner als $e$, ist es offensichtlich, dass immer der kleinere Wert genommen werden muss, um die Summe jener Reihe auszudrücken. Wenn also

$$u = \frac{m^{m+1}}{(m+1)^m} \log \frac{m+1}{m}$$

war, wird der für $y$ zu nehmende Wert

$$y = \left( \frac{m+1}{m} \right)^m$$

sein, welcher immer kleiner ist als $e$, während der andere,

$$y = \left( \frac{m+1}{m} \right)^{m+1},$$

größer ist als $e$.

## THEOREM

**§17** *Wenn die Größe $x$ und $v$ so voneinander abhängen, dass $\log x = vx$ ist und daher jedem beliebigem Wert $v$ zwei Werte von $x$ entsprechen, der eine größer als $e$ der andere hingen kleiner, dann muss in den folgenden Summationen*

$$\text{I.} \quad \frac{x^n - 1}{n} = v + \frac{n+2}{1 \cdot 2}v^2 + \frac{(n+3)^2}{1 \cdot 2 \cdot 3}v^3 + \frac{(n+4)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}v^4 + \text{etc.}$$

$$\text{II.} \quad \frac{x^n}{1 - \log x} = 1 + \frac{n+1}{1}v + \frac{(n+2)^2}{1 \cdot 2}v^2 + \frac{(n+3)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3}v^2 + \frac{(n+4)^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}v^4 + \text{etc.}$$

*für x immer der kleinere Wert genommen werden, welcher natürlich kleiner ist als e.*

Die Natur dieser zwei Reihen ist aus der Entwicklung des zweiten Falls per se offensichtlich. Denn der erste entsteht aus § 8, indem man $\alpha = 1$ nimmt,

**§18** Die zweite Reihe hingegen wird aus der ersten durch Differentiation abgeleitet; daher erlangen wir nämlich durch Differenzieren und Teilen durch $dv$

$$\frac{x^{n-1}dx}{dv} = 1 + \frac{n+2}{1}v + \frac{(n+3)^2}{1 \cdot 2}v^2 + \frac{(n+4)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3}v^3 + \text{etc.}$$

Weil aber $v = \frac{\log x}{x}$ ist, wird $dv = \frac{dx}{xx}(1 - \log x)$ und daher

$$\frac{x^{n-1}dx}{dv} = \frac{x^{n+1}}{1 - \log x}$$

sein. Wenn wir also hier $n-1$ anstelle von $n$ schreiben, wird diese Summation entspringen

$$\frac{x^n}{1 - \log x} = 1 + \frac{n+1}{1}v + \frac{(n+2)^2}{1 \cdot 2}v^2 + \frac{(n+3)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3}v^3 + \text{etc.},$$

welches unsere zweite Reihe selbst ist.

**§19** Aber diese zwei Reihen sind umso mehr der ganzen Aufmerksamkeit würdig anzusehen, weil sie um vieles einfacher und gefälliger sind als die allgemeine Lambert'sche Reihe selbst; aber dann besonders, weil überhaupt kein Weg offen zu stehen scheint, deren Gültigkeit direkt zu beweisen. Obwohl nämlich die Gültigkeit der Lambert'schen Reihe schon hinreichend dargelegt worden ist, können dennoch die Begründungen, auf welche jener Beweis gestützt ist, auf den gegenwärtigen Fall in keiner Weise angewendet werden, worin natürlich ein riesiges Paradoxon erkannt wird, weil sich eine allgemeine Proposition mit einem Beweis untermauern lässt, welcher sich dennoch völlig nicht auf einen Spezialfall übertragen lassen.

**§20** Wie aber die allgemeine Lambert'sche Reihe aus der trinomialen Gleichung

$$x^\alpha - x^\beta = (\alpha - \beta)vx^{\alpha+\beta}$$

abgeleitet werden kann, habe ich bei einer anderen Gelegenheit genauer gezeigt, wo ich zugleich dieselbe Auflösung auf beliebige polynomiale Gleichungen ausgedehnt habe. Aber auf welche Weise umgekehrt die LAMBERT'SCHE Reihe auf eine trinomiale Gleichung reduziert werden kann, scheint eine wesentlich schwierigere Frage zu sein, weshalb es der Mühe wert sein wird, eine solche Analysis erläutert zu haben; damit dies leichter gelingt, möchte ich das folgende Problem vorausschicken.

## PROBLEM

**§21** *Nachdem die* LAMBERT*'sche Reihe vorgelegt worden ist, wie sie eingangs entwickelt worden ist, ihre Übereinstimmung mit dieser trinomischen Gleichung*

$$x^{\alpha} - x^{\beta} = (\alpha - \beta) v x^{\alpha+\beta}$$

*zu lehren.*

### LÖSUNG

Nachdem die Summe jener Reihe $= S$ gesetzt worden ist, nehme ich hier freilich an, dass diese Summe einer Potenz der Art $x^n$ gleich wird, sodass es uns nur interessiert, die Relation zwischen dieser Größe $x$ und den die Reihe festlegenden Größe, welche $\alpha$, $\beta$ und $v$ sind, ausfindig zu machen. Man sieht aber leicht ein, dass dies dieses Grundes keineswegs für einen Bewies gehalten werden kann (weil dies selbst vor allem anderen zu beweisen gewesen wäre), dass Summe $S$ mit einer solchen Form $x^n$ dargeboten werden kann. Nachdem dies aber eingeräumt worden ist, wollen wir die Begründung in folgender Weise geben.

**§22** Nachdem also $S = x^n$ gesetzt worden ist, setze ich zuerst anstelle des unbestimmten Exponenten den bestimmten Wert $n = -\alpha$ und daher wird diese Reihe erhalten werden

$$x^{-\alpha} = 1 - \alpha v - \frac{1}{2}\alpha\beta v^2 - \frac{1}{6}\alpha \cdot 2\beta(\alpha+\beta)v^3 - \frac{1}{24}\alpha \cdot 3\beta(\alpha+2\beta)(2\alpha+\beta)v^4$$

$$-\frac{1}{120}\alpha \cdot 4\beta(\alpha+3\beta)(2\alpha+2\beta)(3\alpha+\beta)v^5 - \text{etc.}$$

In gleicher Weise, wenn wir $n = -\beta$ setzen, werden wir zur folgenden Reihe gelangen

$$x^{-\beta} = 1 - \beta v - \frac{1}{2}\beta\alpha v^2 - \frac{1}{6}\beta \cdot 2\alpha(\beta+\alpha)v^3 - \frac{1}{24}\beta \cdot 3\alpha(\beta+2\alpha)(2\beta+\alpha)v^4$$
$$-\frac{1}{120}\beta \cdot 4\alpha(\beta+3\alpha)(2\beta+2\alpha)(3\beta+\alpha)v^5 - \text{etc.}$$

**§23** Nun wollen wir die erste dieser zwei Reihen von der zweiten abziehen und wir werden diese Gleichheit erhalten

$$x^{-\beta} - x^{-\alpha} = (\alpha - \beta)v,$$

weil außer den zweiten Termen alle folgenden sich offensichtlich gegenseitig aufheben. Wenn wir also nun diese gefundene Gleichung mit $x^{\alpha+\beta}$ multiplizieren, wird die angenommene trinomiale Gleichung

$$x^{\alpha} - x^{\beta} = (\alpha - \beta)vx^{\alpha+\beta}$$

hervorgehen.

**§24** Solange also bewiesen werden könnte, dass die Summe der LAMBERT'schen Reihe einer gewissen Potenz einer bestimmten Größe $x$ zum Exponenten $n$ gleich werden kann, die nicht von $n$ abhängt, würde die vorherige Analysis natürlich einen strengen Beweis darstellen. Im folgenden Problem werden wir aber versuchen, diesen Mangel zu beheben.

## DAS WESENTLICHE PROBLEM

**§25** *Die analytischen Operationen darzustellen, welche zur Kenntnis der wahren Summe der LAMBERT'schen Reihe führen.*

### LÖSUNG

Weil die vorgelegte LAMBERT'sche Reihe die vier Größen $\alpha$, $\beta$, $v$ und $n$ beinhaltet, wollen wir die drei Werte $\alpha$, $\beta$ und $v$ als gegeben und konstant ansehen, während der vierte $n$ gleichsam als Variable angesehen wird; und auf diese

Weise wird sich die gesuchte Summe $S$ als eine gewisse Funktion der Größe $n$ betrachten lassen, welche wir in gewohnter Weise so darstellen wollen $S = \varphi : n$, sodass gilt

$$\varphi : n = 1 + nv + \frac{1}{2}n(n+\alpha+\beta)v^2 + \frac{1}{6}n(n+\alpha+2\beta)(n+2\alpha+\beta)v^3$$
$$+\frac{1}{24}n(n+\alpha+3\beta)(n+2\alpha+2\beta)(n+3\alpha+\beta)v^4$$
$$+\frac{1}{120}n(n+\alpha+4\beta)(n+2\alpha+3\beta)(n+3\alpha+2\beta)(n+4\alpha+\beta)v^5 + \text{etc.}$$

**§26** Weil also diese Gleichung wahr sein muss, welche Zahlen auch immer anstelle von $n$ geschrieben werden, wollen wir $n-\alpha$ anstelle von $n$ setzen und wir werden

$$\varphi : (n-\alpha) = 1 + (n-\alpha)v + \frac{1}{2}(n-\alpha)(n+\beta)v^2$$
$$+\frac{1}{6}(n-\alpha)(n+2\beta)(n+\alpha+\beta)v^3$$
$$+\frac{1}{24}(n-\alpha)(n+3\beta)(n+\alpha+2\beta)(n+2\alpha+\beta)v^4$$
$$+\frac{1}{120}(n-\alpha)(n+4\beta)(n+\alpha+3\beta)(n+2\alpha+2\beta)(n+3\alpha+\beta)v^5 + \text{etc.}$$

erlangen. In gleicher Weise werden wir aber finden, dass

$$\varphi : (n-\beta) = 1 + (n-\beta)v + \frac{1}{2}(n-\beta)(n+\alpha)v^2$$
$$+\frac{1}{6}(n-\beta)(n+2\alpha)(n+\alpha+\beta)v^3$$
$$+\frac{1}{24}(n-\beta)(n+3\alpha)(n+\alpha+2\beta)(n+2\alpha+\beta)v^4$$
$$+\frac{1}{120}(n-\beta)(n+4\alpha)(n+\alpha+3\beta)(n+2\alpha+2\beta)(n+3\alpha+\beta)v^5 + \text{etc.}$$

sein wird.

**§27** Wir wollen nun die erste dieser zwei Reihen von der letzten abziehen, und weil wir für die jeweils allgemeinen Terme der entsprechenden unter Auslassungs der gemeinsamen Faktoren

$$(n-\beta)(n+\lambda\alpha)-(n-\alpha)(n+\lambda\beta)=(\lambda+1)n(\alpha-\beta)$$

haben, werden wir nach Bemerkung dessen und der Subtraktion

$$\varphi:(n-\beta)-\varphi:(n-\alpha)=(\alpha-\beta)v+\frac{2}{2}(\alpha-\beta)nv^2+\frac{3}{6}(\alpha-\beta)n(n+\alpha+\beta)v^3$$
$$+\frac{4}{24}(\alpha-\beta)n(n+\alpha+2\beta)(n+2\alpha+\beta)v^4$$
$$+\frac{5}{120}(\alpha-\beta)n(n+\alpha+3\beta)(n+2\alpha+2\beta)(n+3\alpha+\beta)v^5+\text{etc.}$$

finden.

**§28** Weil in dieser Reihe alle Terme den Faktor $(\alpha-\beta)v$ enthalten, erlangen wir, indem wir durch diesen teilen, diese Gleichung

$$\frac{\varphi:(n-\beta)-\varphi:(n-\alpha)}{(\alpha-\beta)v}$$
$$=1+nv+\frac{1}{2}n(n+\alpha+\beta)v^2+\frac{1}{6}n(n+\alpha+2\beta)(n+2\alpha+\beta)v^3$$
$$+\frac{1}{24}n(n+\alpha+3\beta)(n+2\alpha+2\beta)(n+3\alpha+\beta)v^4+\text{etc.};$$

Weil diese Reihe die selbst ist, welche wir mit dem Symbol $\varphi:n$ notiert haben, haben wir für die zu findende Summe diese Gleichung erhalten:

$$\varphi:(n-\beta)-\varphi:(n-\alpha)=(\alpha-\beta)v\varphi:n.$$

**§29** Die ganze Aufgabe ist also auf diese Frage zurückgeführt worden, eine Funktion von $n$ von welcher Art für $\varphi:n$ angenommen werden muss, dass dieser Gleichung Genüge geleistet wird. Aber dem sie Inspizierenden wird schnell klar werden, dass ihr mit einer solchen Festlegung genügt werden kann

$$\varphi:n=Ak^n,$$

wo freilich weder $A$ noch $k$ den Buchstaben $n$ involviert; aber dann wird

$$\varphi : (n-\alpha) = Ak^{n-\alpha} \quad \text{und} \quad \varphi : (n-\beta) = Ak^{n-\beta}$$

sein. Aber nachdem diese Werte eingesetzt worden sind, wird die gefundene Gleichung diese Form annehmen:

$$A(k^{n-\beta} - k^{n-\alpha}) = (\alpha-\beta)vAk^n,$$

welche durch $Ak^n$ geteilt in diese übergeht

$$k^{-\beta} - k^{-\alpha} = (\alpha-\beta)v;$$

wenn wir sie mit $k^{\alpha+\beta}$ multiplizieren und $x$ anstelle von $k$ schreiben, werden wir zu der anfänglich erwähnten trinomialen Gleichung

$$x^\alpha - x^\beta = (\alpha-\beta)vx^{\alpha+\beta}$$

geführt.

**§30** So ist also sehr streng bewiesen, dass die Summe der LAMBERT'schen Reihe notwendig mit einer solchen Formel ausgedrückt wird, nämlich $S = Ak^n$ oder $S = Ax^n$, wo, weil nach Setzen von $n = 0$ die Summe $= 1$ sein muss, offenkundig ist, dass der Buchstabe $A$ notwendig $= 1$ wird, sodass die Summe der Reihe vollkommen die ist, wie es angegeben worden ist, nämlich $S = x^n$, wenn freilich die Größe $x$ aus der Gleichung $x^\alpha - x^\beta = (\alpha-\beta)vx^{\alpha+\beta}$ gefunden wird.

**§31** Gegen diese Lösung könnte der Einwand erhoben werden, dass der gefundenen Gleichung

$$\varphi : (n-\beta) - \varphi : (n-\alpha) = (\alpha-\beta)v\varphi : n$$

vielleicht noch auf andere Weisen genügt werden kann als mit dem Wert $\varphi : n = A^n$, was freilich nicht abgestritten werden kann, weil Gleichungen von dieser Art meistens mehrere Lösungen zuzulassen pflegen. Aber auch wenn es ausreichen kann, diesen Wert vollkommen zu rechtfertigen und sogar so, dass weder $A$ noch $k$ von $n$ abhängt, kann dennoch dasselbe aus den Grundlagen der Analysis des Unendlichen auch auf die folgende Weise bestätigt werden.

**§32** Weil $S = \varphi : n$ eine Funktion von $n$ ist, ist, nachdem diese Größe als Variable angenommen worden ist, aus allgemeinen Prinzipien bekannt, dass

$$\varphi : (n-\alpha) = S - \frac{\alpha dS}{dn} + \frac{\alpha^2 ddS}{1 \cdot 2dn^2} - \frac{\alpha^3 d^3S}{1 \cdot 2 \cdot 3dn^3} + \frac{\alpha^4 d^4S}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4n^4} - \text{etc.}$$

und in gleicher Weise

$$\varphi : (n-\beta) = S - \frac{\beta dS}{dn} + \frac{\beta^2 ddS}{1 \cdot 2dn^2} - \frac{\beta^3 d^3S}{1 \cdot 2 \cdot 3dn^3} + \frac{\beta^4 d^4S}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4n^4} - \text{etc.}$$

sein wird. Nachdem diese Werte eingesetzt worden sind, werden wir zu diese Differentialgleichung unendlicher Ordnung gelangen

$$(\alpha-\beta)vS = (\alpha-\beta)\frac{dS}{dn} - (\alpha\alpha - \beta\beta)\frac{ddS}{1 \cdot 2dn^2}$$
$$+(\alpha^3-\beta^3)\frac{d^3S}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot dn^3} - (\alpha^4-\beta^4)\frac{d^4S}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4dn^4} + \text{etc.},$$

aus welcher die Größe $S$ gefunden werden muss.

**§33** Weil aber in den einzelnen Termen dieser Gleichung die Variable $S$ überall eine Dimension hat, in der Integralrechnung aber gezeigt worden ist, dass eine solche Gleichung nicht anders erfüllt werden kann als mit Werten von dieser Art

$$S = Ce^{\lambda n},$$

wird, nachdem dies gezeigt worden ist, wenn wir $e^{\lambda} = k$ setzen,

$$S = Ck^n$$

werden, genauso wie wir angenommen haben, sodass nun nichts weiter zur Lambert'schen Reihe zu wünschen scheint.

## Eine weitere Bestätigung der gegebenen Lösung

**§34** Wenn wir allein auf die gefundene Lösung schauen, nach welcher

$$\varphi : (n-\beta) - \varphi : (n-\alpha) = (\alpha-\beta)v\varphi : n$$

sein muss, kann ihr natürlich auf viel allgemeinere Weise Genüge geleistet werden. Wenn nämlich die einzelnen Buchstaben $p$, $q$, $r$, $s$ etc. Wurzeln dieser Gleichung $x^{-\beta} - x^{-\alpha} = (\alpha - \beta)v$ waren, ist es offensichtlich, dass der Wert

$$\varphi : n = Ap^n + Bq^n + Cr^n + Ds^n + \text{etc.}$$

derselben Bedingung genügt. In dieser Formel wird also gewiss der Wert der Summe $S$ der LAMBERT'schen Reihe enthalten sein; weil diese bestimmt ist und allein von den Größen $\alpha$, $\beta$, $n$ und $v$ abhängt, wird gefragt, wie jene unbestimmten Buchstaben $A$, $B$, $C$, $D$ etc. bestimmt werden müssen, dass $S = \varphi : n$ wird.

**§35** Hier zeigen sich aber sofort zwei Fälle, je nachdem ob eine einzige der Wurzeln die Summe $S$ bestimmt oder gänzlich alle Wurzeln auftreten, um sie zu bestimmen, welche beiden Fälle also sorgfältig betrachten werden sollten. Hier bemerke ich zuerst, wenn alle Wurzeln $p$, $q$, $r$, $s$ etc. zugleich zu gebrauchen waren, dass sie ohne Zweifel in gleicher Weise eingehen müssen, weil es keinen Grund gibt, warum eine von ihnen den anderen vorgezogen werden sollte. Deshalb wären jene Koeffizienten $A$, $B$, $C$, $D$ etc. einander gleich und daher wäre

$$S = A(p^n + q^n + r^n + s^n + \text{etc.}),$$

woher, weil im Fall $n = 0$ ja $S = 1$ werden muss, wenn die Anzahl der Wurzeln $= i$ gesetzt wird, in diesem Fall $S = Ai$ wird, also $A = \frac{1}{i}$.

**§36** Außerdem ist unsere Reihe aber so beschaffen, dass für $v = 0$ ihre Summe auch als $S = 1$ hervorgeht. Nun wird aber im Fall $v = 0$ unsere Gleichung $x^{-\beta} - x^{-\alpha} = 0$ oder $x^{\alpha-\beta} - 1 = 0$ sein, eine Wurzel von welcher immer $= 1$ ist und deren Summe aller Wurzeln immer $= 0$ ist, außer im Fall $\alpha - \beta = 1$. Wenn also $n = 1$ genommen wird, ginge

$$S = \frac{1}{i}(p + q + r + s + \text{etc.}) = 0$$

hervor, obwohl dennoch die Summe $= 1$ ist, sodass diese Annahme falsch ist.

**§37** Derselbe Umstand wird sich um vieles deutlicher zeigen, wenn wir im Allgemeinen $n = 1$ setzen, in welchem Fall natürlich

$$S = \frac{1}{i}(p + q + r + s + \text{etc.})$$

wäre, wo $p + q + r + s +$ etc. die Summe der Wurzeln der trinomialen Gleichung

$$x^{-\beta} - x^{-\alpha} = (\alpha - \beta)v \tag{1}$$

ist und daher dem Koeffizienten des zweiten Terms gleich wird, nachdem die Gleichung in Ordnung gebracht worden ist; weil dieser meistens fehlt, wäre die Summe auch in diesem Fall gleich Null. Weil dies der Wahrheit widerspricht, ist hinreichend gezeigt, dass nicht alle Wurzeln der trinomialen Gleichung zusammenkommen können, um die Summe $S$ zu bestimmen.

**§38** Nachdem dieser Fall also abgehandelt worden ist, in dem alle Wurzeln gleichermaßen eingehen, bleibt der erste Fall übrig, in welchem die Summe $S$ durch eine einzige dieser Wurzeln bestimmt wird, so wie wir es in der Lösung angenommen haben. Es ist aber ersichtlich, dass diese Wurzel entweder die kleinste oder die größte sein wird; hier tritt natürlich derselbe Unterschied zutage wie in der Lösung aller Gleichungen mittels rekurrenter Reihen, mit welcher Methode gleichermaßen nur eine einzige Wurzel von Gleichungen, entweder die größte oder die kleinste, gefunden zu werden pflegt, und so ist unsere gegebene Lösung nun über jeden Zweifel vollendet. Bei der Gelegenheit dieser Methode, die wir gebraucht haben, wird es nicht unpassend sein, das folgende Problem hinzugefügt zu haben.

## Problem

**§39** *Alle Funktionen der variablen Größe n zu finden, mit welchen dieser Bedingung Genüge geleistet wird*

$$\varphi : n = a\varphi(n + \alpha) + b\varphi : (n + \beta) + c\varphi(n + \gamma) + \text{etc.}$$

### Lösung

Wenn wir wie im vorhergehenden Problem vorgehen, wird schnell klar werden, dass dieser Bedingung genügt wird, indem man

$$\varphi : n = Ak^n$$

setzt, sodass $A$ und $k$ konstante Größen sind. Aber nach der Substitution wird diese Gleichung hervorgehen

$$Ak^n = Aak^{n+\alpha} + Abk^{n+\beta} + Ack^{n+\gamma} + Adk^{n+\delta} + \text{etc.},$$

welche durch $Ak^n$ geteilt

$$1 = ak^\alpha + bk^\beta + ck^\gamma + dk^\delta + \text{etc.}$$

liefert, sodass $k$ eine bestimmte Wurzel dieser Gleichung bezeichnet, deren einzelne Wurzeln also die vorgeschriebene Bedingung gleichermaßen erfüllen. Ja es werden sich sogar all diese verschiedenen Lösungen in beliebiger Weise kombinieren lassen. Wenn also $p$, $q$, $r$, $s$ etc. die Wurzeln dieser Gleichung waren, wird unserem Problem allgemein Genüge geleistet werden, indem wir

$$\varphi : n = Ap^n + Bq^n + Cr^n + \text{etc.}$$

setzen, wo die Buchstaben $A$, $B$, $C$, $D$ etc. vollkommen unserem Belieben überlassen bleiben; und dies ist die allgemeine Lösung jenes analytischen Problems, welches oft einen riesigen Nutzen bringen können wird.

**§40** Aber wir wollen zur LAMBERT'schen Reihen zurückkehren und wollen zeigen, wie aus ihr unzählige andere ähnliche Reihen abgeleitet werden können.

## PROBLEM

**§41** *Nach Vorlage der* LAMBERT*'schen Reihe, welche wir der Kürze wegen in dieser Form darstellen wollen*

$$S = 1 + Av + Bv^2 + Cv^3 + Dv^4 + etc.,$$

*deren Summe wir wissen* $= x^n$ *zu sein, sofern man für* $x$ *entweder die größte oder die kleinste Wurzel dieser trinomialen Gleichung*

$$x^\alpha - x^\beta = (\alpha - \beta)vx^{\alpha+\beta}$$

*nimmt, daraus unzählige andere affine Reihen zu bilden, deren Summen sich gleichermaßen angeben lassen.*

Hier wollen wir also den Buchstaben $A$, $B$, $C$, $D$ etc. der Kürze wegen die folgenden Werte zuteilen

$$\begin{gathered}A = n,\\ B = \frac{1}{2}n(n+\alpha+\beta),\\ C = \frac{1}{6}n(n+\alpha+2\beta)(n+2\alpha+\beta),\\ D = \frac{1}{24}n(n+\alpha+3\beta)(n+2\alpha+2\beta)(n+3\alpha+\beta),\\ E = \frac{1}{120}n(n+\alpha+4\beta)(n+2\alpha+3\beta)(n+3\alpha+2\beta)(n+4\alpha+\beta)\\ \text{etc.}\end{gathered}$$

Nachdem diese Werte also notiert worden sind, stehen hauptsächlich zwei Wege offen, um daraus andere Reihen abzuleiten; der eine geht über Differentiation, der andere hingegen über Integration vor.

**§42** Weil $(\alpha-\beta)v = x^{-\beta} - x^{-\alpha}$ ist, wird

$$(\alpha-\beta)dv = -\beta x^{-\beta-1}dx + \alpha x^{-\alpha-1}dx$$

oder

$$(\alpha-\beta)dv = \frac{dx(\alpha x^{\beta} - \beta x^{\alpha})}{x^{\alpha+\beta+1}}$$

sein; daher werden wir also, wenn wir unsere Reihe differenzieren und durch $dv$ teilen, zur folgenden Summation gelangen

$$\frac{(\alpha-\beta)nx^{n+\alpha+\beta}}{\alpha x^{\beta} - \beta x^{\alpha}} = A + 2Bv + 3Cvv + 4Dv^3 + 5Ev^4 + 6Fv^5 + \text{etc.}$$

**§43** Wir hätten die vorgelegte Reihe auch mit einer bestimmten Potenz von $v$ multiplizieren können, bevor wir differenzieren; indem wir beispielsweise mit $v^\lambda$ multiplizieren, dass wir

$$v^\lambda x^n = v^\lambda + Av^{\lambda+1} + Bv^{\lambda+2} + Cv^{\lambda+3} + Dv^{\lambda+4} + \text{etc.}$$

haben, liefert diese Reihe differenziert und durch $dv$ geteilt

$$\lambda v^{\lambda-1}x^n + nv^\lambda x^{n-1}\frac{dx}{dv} = \lambda v^{\lambda-1} + (\lambda+1)Av + (\lambda+2)Bv^{\lambda+1} + (\lambda+3)Cv^{\lambda+2}$$

$$+(\lambda+4)Dv^{\lambda+3} + (\lambda+5)Ev^{\lambda+4} + \text{etc.},$$

welcher Ausdruck durch $v^{\lambda-1}$ geteilt diese Summation liefert

$$\lambda x^n + nvx^{n-1}\frac{dx}{dv} = \lambda + (\lambda+1)Av + (\lambda+2)Bv^2 + (\lambda+3)Cv^3$$

$$+(\lambda+4)Dv^4 + \text{etc.},$$

für welche wir gerade gesehen haben

$$\frac{nx^{n-1}dx}{dv} = \frac{(\alpha-\beta)nx^{n+\alpha+\beta}}{\alpha x^\beta - \beta x^\alpha}$$

zu sein, nach Einsetzen welches Wertes diese Summe

$$= \lambda x^n + \frac{nx^{n+\alpha} - nx^{n+\beta}}{\alpha x^\beta - \beta x^\alpha} = \frac{x^n}{\alpha x^\beta - \beta x^\alpha}((\lambda\alpha - n)x^\beta - (\lambda\beta - n)x^\alpha)$$

werden wird.

**§44** Wenn wir nun diese Reihe nun erneut mit $v^\mu$ multiplizieren und wiederum differenzieren, werden wir neue Reihen erhalten, deren Summation ebenso möglich ist. Und auf diese Weise wird sich immer weiter fortschreiten lassen, welche Arbeit weiter zu verfolgen, vollkommen überflüssig wäre.

**§45** In ähnlicher Weise werden wir durch Integration neue Reihen finden können. Wenn wir nämlich die vorgelegte Reihe mit

$$dv = \frac{\alpha x^{-\alpha-1}dx}{\alpha-\beta} - \frac{\beta x^{-\beta-1}dx}{\alpha-\beta}$$

multiplizieren und beide Seiten integrieren, werden wir zur folgenden Reihe gelangen

$$\frac{\alpha x^{n-\alpha}}{(\alpha-\beta)(n-\alpha)} - \frac{\beta x^{n-\beta}}{(\alpha-\beta)(n-\beta)}$$
$$= v + \frac{1}{2}Avv + \frac{1}{3}Bv^3 + \frac{1}{4}Cv^4 + \frac{1}{5}Dv^5 + \text{etc.} + \text{Konst.};$$

um die Konstante zu bestimmen, betrachte man den Fall $v = 0$, in welchem $x = 1$ und daher die Konstante $= \frac{n}{(n-\alpha)(n-\beta)}$ wird.

**§46** Wir hätten vor der Integration auch mit $v^\lambda$ multiplizieren können; aber auf diese Weise würden wir in zu aufwendige Rechnungen hineingeraten, woher es uns genügen soll, eine Quelle eröffnet zu haben, aus welcher unzählige neue Reihen dieser Art geschöpft werden können.